Proposition de corrigé de l'épreuve de Math 1 du C.N.C.M., section MP, année : 2015.

Mohammed ICHEHA [*] Mohamed AIT LHOUSSAIN [†]

10 juin 2015

Problème I

Partie I

1.1. Montrons que Σ_A est un espace vectoriel.

• **Première méthode :**

Σ_A est une partie de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^{\mathbb{R}_+}$ des applications de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc il suffit de prouver que Σ_A est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^{\mathbb{R}_+}$.

i) $\Sigma_A \neq \emptyset$

En effet la fonction nulle $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), t \mapsto 0$ est un élément de Σ_A puisque Θ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \Theta''(t) = 0 = A(t)\Theta(t).$$

ii) Stabilité par combinaison linéaire :

Soit $F, G \in \Sigma_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda F + G \in \Sigma_A$ car $\lambda F + G$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda F + G)''(t) &= \lambda F''(t) + G''(t) \\ &= \lambda A(t)F(t) + A(t)G(t) \\ &= A(t)(\lambda F(t) + G(t)) \\ &= A(t)\left((\lambda F + G)(t)\right).\end{aligned}$$

• **Deuxième méthode :**

On note $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Soit $T : \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^+}, F \mapsto T(F)$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, T(F)(t) = F''(t) - A(t)F(t).$$

Alors T est une application linéaire car pour tout $F, G \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}T(\lambda F + G)(t) &= (\lambda F + G)''(t) - A(t)(\lambda F + G)(t) \\ &= \lambda(F''(t) - A(t)F(t)) + (G''(t) - A(t)G(t)) \\ &= \lambda T(F)(t) + T(G)(t) = (\lambda T(F) + T(G))(t),\end{aligned}$$

[*]Centre Omar Ibn Lkhattab , Meknes, Maroc

[†]Centre Salmane El Farissi , Salé, Maroc

ce qui veut dire : $T(\lambda F+G)=\lambda T(F)+T(G)$.
On a : $\Sigma_A=\ker T$ car $\Sigma_A\subset\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et, pour tout $F\in\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, on a

$$\begin{aligned} F\in\ker T &\Leftrightarrow T(F)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}_+, T(F)(t)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}_+, F''(t)-A(t)F(t)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}_+, F''(t)=A(t)F(t)\\ &\Leftrightarrow F\in\Sigma_A. \end{aligned}$$

donc Σ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, en particulier Σ_A est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2.
1.2.1.

$$\begin{aligned} x_F\in\Sigma_B &\Leftrightarrow x_F'=B(t)x_F\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F'\\ F''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I_n\\ A(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F\\ F'\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F'\\ F''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F'\\ A(t)F\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow F''=A(t)F\\ &\Leftrightarrow F\in\Sigma_A \end{aligned}$$

Ainsi $x_F\in\Sigma_B\Leftrightarrow F\in\Sigma_A$.

1.2.2.
• Φ linéaire : Soit $F,G\in\Sigma_A$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda F+G) &= \begin{pmatrix} \lambda F+G\\ (\lambda F+G)'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \lambda F+G\\ \lambda F'+G'\end{pmatrix}\\ &= \lambda\begin{pmatrix} F\\ F'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} G\\ G'\end{pmatrix}\\ &= \lambda\Phi(F)+\Phi(G) \end{aligned}$$

• Φ injectif : Soit $F\in\ker\Phi$ alors $\Phi(F)=x_F=0$, donc $\begin{pmatrix} F\\ F'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$,donc $F=F'=0$, en particulier, $F=0$. Donc Φ est injectif.
• Φ surjectif : Soit $y\in\Sigma_B$ alors y est une solution du système différentiel $x'=B(t)x$. Posons $y=\begin{pmatrix} F\\ G\end{pmatrix}$ avec $F,G\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}_+}$, donc F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{pmatrix} F\,'\\ G\,'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I_n\\ A(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F\\ G\end{pmatrix},$$

donc $F'=G$ et $G'=A(t)F$, cela donne en particulier F deux fois dérivable et $F''=A(t)F$ donc $F\in\Sigma_A$ et $y=\begin{pmatrix} F\\ F'\end{pmatrix}=\Phi(F)$.

Ainsi, $\exists F \in \Sigma_A, y = x_F = \Phi(F)$ donc Φ est surjectif.
Conclusion : Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1.2.3. L'application $B : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$ est continue. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire $\dim \Sigma_B = \dim(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) = 2n$. Comme Σ_A et Σ_B sont isomorphes, on a $\dim \Sigma_A = 2n$.

1.3.

Soit $y_0 = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ alors $y_0 \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

• **Existence :** Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une et une seule solution $x \in \Sigma_B$ tel que $x(s) = y_0$. Soit $F = \Phi^{-1}(x)$, donc $x = x_F = \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = x(s) = \begin{pmatrix} F(s) \\ F'(s) \end{pmatrix}$ de sorte que $F(s) = v$ et $F'(s) = w$. On a donc trouvé $F \in \Sigma_A$ tel que $F(s) = v$ et $F'(s) = w$.

• **Unicité :** soit $G \in \Sigma_A$ tel que $G(s) = v$ et $G'(s) = w$, alors $x_G = \begin{pmatrix} G \\ G' \end{pmatrix}$ est un élément de Σ_B qui vérifie $x_G(s) = y_0$. Par unicité (Théorème de Cauchy-Lipschitz) on a $x_G = x$ donc $G = F$.

Partie II

2.1.

2.1.1.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $f(t) = \langle F(t), F(t)\rangle$. F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire continue sur $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, donc par composition, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\begin{cases} f'(t) = 2\langle F(t), F'(t)\rangle \\ f''(t) = 2\langle F(t), F''(t)\rangle + 2\,\|F'(t)\|^2 \end{cases}$. Comme $F \in \Sigma_A$, on a aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) = 2\langle A(t)F(t), F(t)\rangle + 2\,\|F'(t)\|^2$

2.1.2.

On sait par hypothèse que $\langle A(t)F(t), F(t)\rangle \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc, compte tenu de l'expression ci-dessus de $f''(x)$, on a : $f'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et par suite f est convexe.

2.2.

2.2.1.

Soit $t \in [t_1, t_2]$, alors il existe $\tau \in [0, 1]$ tel que $t = (1 - \tau)t_1 + \tau t_2$ alors, et compte tenu de $f(t_1) = f(t_2) = 0$, on a :

$$0 \leq f(t) \leq (1 - \tau)f(t_1) + \tau f(t_2) = 0,$$

ce qui donne $f(t) = 0$.

2.2.2. On a $F = 0$ sur $[t_1, t_2]$, donc $F' = 0$ sur $[t_1, t_2]$ donc en posant $s = t_1$ on a :

$$x_F(s) = \begin{pmatrix} F(s) \\ F'(s) \end{pmatrix} = 0$$

Il en découle que x_F est une solution du problème de Cauchy :

$$(\mathscr{C}) \quad \begin{cases} x' = B(t)x \\ x(s) = 0 \end{cases}$$

Or la fonction nulle est une solution de $(\mathscr{C})$. Par unicité de la solution de $(\mathscr{C})$ on a $x_F = 0$, donc $\Phi(F) = 0$, donc $F = 0$, puisque Φ est injectif.

2.3. Dans tout ce qui suit on notera $f_v = \|F_v\|^2$. On va proposer deux méthodes pour répondre à cette question.

• **Première méthode :**

La tangente au graphe de f_v en 0 est au dessous de ce graphe, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_v(t) \geq f_v'(0)t + f_v(0)$ or $f_v'(0) = 2\langle F_v(0), F_v'(0)\rangle = \|v\|^2 > 0$ et $f_v(0) = \|v\|^2$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_v(t) \geq \|v\|^2 t + \|v\|^2$ avec $\lim\limits_{t \to +\infty} \|v\|^2 t + \|v\|^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f_v(t) = +\infty$, et comme $\|F_v\| = \sqrt{f_v}$, on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} \|F_v(t)\| = +\infty$

• **Deuxième méthode :**

On a $f_v'(0) = \langle F_v(0), F_v'(0)\rangle = \|v\|^2$. Comme $v \neq 0$, on a alors $f_v'(0) > 0$. Par ailleurs, f_v' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car $f_v'' \geq 0$ alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_v'(t) \geq f_v'(0) = \|v\|^2 > 0$. Comme f_v est convexe sur $\mathbb{R}_+$, l'application $\varphi : t \mapsto \frac{f_v(t) - f_v(0)}{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, en particulier on a pour tout $t \geq 1$: $\varphi(t) \geq \varphi(1)$, or $\varphi(1) = f_v(1) - f_v(0)$. Posons $A = f_v(1) - f_v(0)$ et montrons que $A > 0$: Par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, 1[$ tel que $A = f_v'(c)$ et on sait que $f_v' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall t \geq 1, \quad f_v(t) \geq At + f_v(0)$$

et comme $\lim\limits_{t \to +\infty} (At + f_v(0)) = +\infty$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} f_v(t) = +\infty$ et comme $\|F_v\| = \sqrt{f_v}$, on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} \|F_v(t)\| = +\infty$

2.4.

2.4.1. L'application Ψ est linéaire car si $F, G \in \Sigma_A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors :

$$\Psi(\lambda F + G) = ((\lambda F + G)(0), (\lambda F + G)(b)) = \lambda(F(0), F(b)) + (G(0), G(b)) = \lambda\Psi(F) + \Psi(G)$$

• Montrons que Ψ est injective : Si $F \in \ker \Psi$ alors $F \in \Sigma_A$ et $F(0) = F(b) = 0$. D'après le résultat de la question 2.2. appliqué à $t_1 = 0$ et $t_2 = b$ (on a bien $0 = t_1 < t_2 = b$), on a $F = 0$.

• Comme $\dim \Sigma_A = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ $(= 2n)$, l'applications linéaire Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.4.2. Avant de montrer que $\|.\|_b$ est une norme, remarquons[1] tout d'abord que $\|.\|_b$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Démontrons ensuite que $\|.\|_b$ vérifie les axiomes d'une norme :

• Soit $F \in \Sigma_A$ tel que $\|F\|_b = 0$ alors $\|F(0)\| + \|F(b)\| = 0$, donc $\|F(0)\| = \|F(b)\| = 0$, c'est-à-dire $F(0) = F(b) = 0$. En appliquant le résultat de la question 2.2. pour $(t_1, t_2) = (0, b)$ (puisque $0 < b$), on a F est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F \in \Sigma_A$, on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda F\|_b &= \|(\lambda F)(0)\| + \|(\lambda F)(b)\| \\ &= \|\lambda F(0)\| + \|\lambda F(b)\| \\ &= |\lambda| (\|F(0)\| + \|F(b)\|) \quad (\text{ homogénéité pour } \|.\|) \\ &= |\lambda| \|F\|_b. \end{aligned}$$

1. En fait une application $\nu : E \to \mathbb{R}$ d'un espace vectoriel E vers $\mathbb{R}$ vérifiant l'homogénéité et l'inégalité triangulaire est nécessairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En effet, si c'est le cas alors :
- D'après l'homogénéité, $\nu(0) = \nu(0.0) = 0.\nu(0) = 0$.
- Pour tout $x \in E$, on a par l'inégalité triangulaire : $0 = \nu(0) = \nu(x - x) \leq \nu(x) + \nu(-x) = 2\nu(x)$ (on a $\nu(-x) = \nu(x)$ par homogénéité). Donc $\nu(x) \geq 0$.

• Pour tout $F, G \in \Sigma_A$, on a :

$$\begin{aligned}
\|F+G\|_b &= \|(F+G)(0)\| + \|(F+G)(b)\| \\
&= \|F(0)+G(0)\| + \|F(b)+G(b)\| \\
&\leq \|F(0)\| + \|G(0)\| + \|F(b)\| + \|G(b)\| \quad (\text{ inégalité triangulaire pour } \|.\|) \\
&= (\|F(0)\| + \|F(b)\|) + (\|G(0)\| + \|G(b)\|) \\
&= \|F\|_b + \|G\|_b .
\end{aligned}$$

Donc $\|.\|_b$ est bien une norme sur Σ_A.

2.4.3. Remarquons d'abord que $\|.\|_{\infty,b}$ est bien définie car toute fonction F élément de Σ_A est continue sur le compact $[0,b]$ donc F est bornée sur $[0,b]$.
• Séparation : Soit $F \in \Sigma_A$ tel que $\|F\|_{\infty,b} = 0$. Puisque $\forall t \in [O,b]$, $0 \leq \|F(t)\| \leq \|F\|_{\infty,b} = 0$ alors $\forall t \in [0,b], F(t) = 0$; en particulier on a $F(0) = F(b) = 0$ et $0 < b$. Donc par la question 2.2 on conclut que $F = 0$.
• Homogénéité : Soit $F \in \Sigma_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose à présent que $\lambda \neq 0$. Pour tout $t \in [0,b]$, on a : $| \, \|(\lambda F)(t)\| = |\lambda| \, \|F(t)\| \leq |\lambda| \sup_{\tau \in [0,b]} \|F(\tau)\| = |\lambda| \, \|F\|_{\infty,b}$, Il en résulte, que :

$$\|(\lambda F)\|_{\infty,b} \leq |\lambda| \, \|F(t)\|_{\infty,b} . \tag{1}$$

En appliquant (1) à $F_1 = \lambda F$ et $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda F) \right\|_{\infty,b} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda F\|_{\infty,b} \tag{2}$$

Combinant (1) et (2), on obtient $\|\lambda F\|_{\infty,b} = |\lambda| \, \|F\|_{\infty,b}$, valable aussi pour $\lambda = 0$. Ainsi on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall F \in \Sigma_A, \|\lambda F\|_{\infty,b} = |\lambda| \, \|F\|_{\infty,b}$$

• Inégalité triangulaire : Soit $F, G \in \Sigma_A$, alors comme $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall t \in [0,b], \|F(t)+G(t)\| \leq \|F(t)\| + \|G(t)\| \leq \|F\|_{\infty,b} + \|G\|_{\infty,b}$$

Par passage au sup, on obtient :

$$\|F+G\|_{\infty,b} \leq \|F\|_{\infty,b} + \|G\|_{\infty,b}$$

Conclusion : $\|.\|_{\infty,b}$ est une norme sur Σ_A.

2.4.4. Comme Σ_A est un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes de Σ_A sont équivalentes en particulier les deux normes ci-dessus sont équivalentes.

Partie III

3.1.
3.1.1. Comme $g_{m,a} \in \Sigma_A$, on a vu dans la question 2.1.2. que si on considère la fonction g définie par $g(t) = \|g_{m,a}\|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors $g'' \geq 0$ et par suite g' est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $g'(m) = 2\langle g_{m,a}(m), g'_{m,a}(m)\rangle = 2\langle 0, g'_{m,a}(m)\rangle = 0$, donc $g' \leq 0$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme g et $\|g_{m,a}\|$ ont la même monotonie, alors $\|g_{m,a}\|$ est elle aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3.1.2. On a $\|g_{m,a}\|_1 = \|g_{m,a}(0)\| + \|g_{m,a}(1)\|$. D'après la question 3.1.1, $t \mapsto \|g_{m,a}(t)\|$ est décroissante sur $[0, m]$. Comme $1 \leq m$, on a donc : $\|g_{m,a}(1)\| \leq \|g_{m,a}(0)\| = \|a\|$, ce qui donne : $\|g_{m,a}\|_1 \leq 2\|a\|$ et montre que la suite $(g_{m,a})_{m\geq 1}$ est bornée dans l'espace vectoriel normé $(\Sigma_A, \|.\|_1)$.

3.1.3. $(\Sigma_A, \|.\|_1)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie et $(g_{m,a})_{m\geq 1}$ est une suite bornée d'éléments de Σ_A. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(g_{\sigma(m),a})_{m\geq 1}$ qui converge dans $(\Sigma_A, \|.\|_1)$ vers un élément g_a. Soulignons qu'en particulier, $g_a \in \Sigma_A$, ce qui veut dire que g_a est une solution de l'équation différentielle (1).

3.2.
On conserve les notations de la question 3.1. précédente.

3.2.1. Soit K un compact de $\mathbb{R}_+$, il existe $b > 0$ tel que $K \subset [0, b]$. D'après la question 2.4.4., on dispose des normes $\|.\|_{\infty,b}$ et $\|.\|_1$ sur Σ_A et elles sont équivalentes car Σ_A est de dimension finie. Comme $K \subset [0, b]$, on a :

$$(\star) \quad \sup_{t\in K} \left\|g_{\sigma(m),a}(t) - g_a(t)\right\| \leq \left\|g_{\sigma(m),a} - g_a\right\|_{\infty,b}$$

Par ailleurs $\|.\|_1$ et $\|.\|_{\infty,b}$ étant équivalentes et $(g_{\sigma(m),a})_{m\geq 1}$ converge vers g_a pour $\|.\|_1$, cette convergence a lieu pour $\|.\|_{\infty,b}$. Donc, par $(\star)$ ci-dessus, on a :

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{t\in K} \left\|g_{\sigma(m),a}(t) - g_a(t)\right\| = 0$$

Par conséquent, la suite $(g_{\sigma(m),a})_{m\geq 1}$ converge uniformément sur K vers g_a.

3.2.2. Puisque $(g_{\sigma(m),a}(0))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g_a sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, elle converge simplement vers g_a sur $\mathbb{R}_+$, donc : $\lim\limits_{m\to+\infty} g_{\sigma(m),a}(0) = g_a(0)$, et comme $\forall m \in \mathbb{N}^*, g_{\sigma(m),a}(0) = a$, on a : $g_a(0) = a$.
L'application $\|g_a\|$ est décroissante; en effet soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $t_1 \leq t_2$. Il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_2 \leq m_0$. Pour tout $m \geq m_0$ on a donc $t_1, t_2 \in [\![0, \sigma(m)]\!] = I_m$. On sait d'après la question 3.1.1. que $\left\|g_{\sigma(m),a}\right\|$ est décroissante sur I_m, par suite : $\left\|g_{\sigma(m),a}(t_2)\right\| \leq \left\|g_{\sigma(m),a}(t_1)\right\|$, et par passage à la limite, quand $m \to +\infty$, on obtient $\|g_a(t_2)\| \leq \|g_a(t_1)\|$, ce qui montre que g_a est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3.2.3. On sait déjà que g_a est une solution de l'équation différentielle (1), puisque $g_a \in \Sigma_A$ d'après la question 3.1.3. Il reste à démontrer qu'elle est bornée. Or on a $\|g_a\|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|g_a(t)\| \leq \|g_a(0)\| = \|a\|$$

Donc g_a est une solution bornée de l'équation différentielle (1).

3.3. Toutes les notations sont conservées.

3.3.1. Soit $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_{e_i} \in \Sigma_1$. Remarquons qu'effectivement $g \in \Sigma_A$ comme le dit l'énoncé car pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $g_{e_i} \in \Sigma_A$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, g_{e_i} est bornée car $e_i \neq 0$. Donc g est bornée. On conclut alors que tout élément de Σ_1 est une solution bornée de l'équation différentielle (1)

3.3.2. Il suffit de montrer que la famille $(g_{e_1}, \cdots, g_{e_n})$ est libre car c'est une famille génératrice de Σ_1. Soit alors $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_{e_i} = 0$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_{e_i}(0) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ par liberté de $(e_1, \cdots, e_n)$.

3.3.3. Soit $T : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \Sigma_A, v \mapsto T(v) = F_v$
Montrons que T est linéaire, pour cela soit $v, w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a : $\lambda F_v + F_w \in \Sigma_A$ et $(\lambda F_v + F_w)(0) = (\lambda F_v + F_w)'(0) = \lambda v + w$, donc par définition

$$\lambda F_v + F_w = F_{\lambda v + w}$$

Ainsi on a :

$$T(\lambda v + w) = \lambda T(v) + T(w)$$

On a $\text{Im}(T) = \Sigma_2$.
T est injective car si $v \in \ker T$, cela veut dire que $T(v) = F_v = 0$ donc $F_v(0) = 0$. Or $F_v(0) = v$, d'où $v = 0$.
Il découle de tout ce qui précède que Σ_2 est un sous-espace vectoriel de Σ_A isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
En particulier on a $\dim \Sigma_2 = n$.
3.3.4. Comme $\dim \Sigma_1 + \dim \Sigma_2 = \dim \Sigma_A$, il suffit de prouver que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{0\}$. Pour cela soit $g \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, alors il existe $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $g = F_v$ et g est bornée. D'après la question 2.3, on a $v = 0$ car sinon $\|g\|$ aurait une limite infinie en $+\infty$, ce qui contredit qu'elle est bornée. Donc $v = 0$ et par suite $g = F_0 = 0$. Donc :

$$\Sigma_A = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2.$$

3.3.5. Comme Σ_1 est un sous-espace vectoriel de Σ_A de dimension finie, il est fermé dans Σ_A donc $\Sigma_A \backslash \Sigma_1$ est un ouvert de Σ_A.
• Densité : Soit $\varphi \in \Sigma_A$: On va montrer qu' il existe une suite $(\psi_p)_{p \geq 1}$ d'éléments de $\Omega = \Sigma_A \backslash \Sigma_1$ tel que $\psi_p \to \varphi$ dans $(\Sigma_A, \|.\|_1)$ (toutes le normes sur Σ_1 étant équivalentes, n'importe quelle autre norme sur Σ_A convient).
Si $\varphi \in \Omega$ la suite constante définie par : $\psi_p = \varphi$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, convient.
Si $\varphi \notin \Omega$ alors $\varphi \in \Sigma_1$. Comme $\Sigma_1 \neq \Sigma_A$ ($n < 2n$ car $n \in \mathbb{N}^*$), on a $\Omega \neq \emptyset$, soit alors $\omega \in \Omega$. Soit $(\psi_p)_{p \geq 1}$ la suite définie par $\psi_p = \varphi + \frac{1}{p}\omega$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors :
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\psi_p \in \Omega$. En effet s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\psi_p \notin \Omega$ alors $\psi_p \in \Sigma_1$ donc $\omega = p(\psi_p - \varphi) \in \Sigma_1$, ce qui contredit le fait que $\omega \in \Omega$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|\psi_p - \varphi\|_1 = \frac{1}{p}\|\omega\|_1$, donc $\|\psi_p - \varphi\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Il résulte de cette étude que tout élément φ de Σ_A est limite d'une suite $(\psi_p)_{p \geq 1}$ à valeurs dans $\Omega = \Sigma_A \backslash \Sigma_1$. Donc $\Sigma_A \backslash \Sigma_1$ est dense dans Σ_A.
• Soit F une solution de (1) .
- Si $F \in \Sigma_1$ alors d'après la question 3.3.1. on a F est bornée.
- Si $F \in \Sigma_A \backslash \Sigma_1$ alors $F = G_1 + G_2$ avec $G_1 \in \Sigma_1$ et $G_2 \in \Sigma_2$ non nulle donc G_2 s'écrit $G_2 = F_v$ avec $v \neq 0$. D'après la question 2.3. on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \|G_2(t)\| = +\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\|F(t)\| = \|G_1(t) + G_2(t)\| \geq \|G_2(t)\| - \|G_1(t)\| \geq \|G_2(t)\| - M$$

où $M = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \|G_1(t)\|$ qui existe puisque $G_1 \in \Sigma_1$, donc G_1 est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
On a $\lim\limits_{t \to +\infty} (\|G_2(t)\| - M) = +\infty$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} (\|F(t)\| = +\infty$.

Problème II

Partie I : Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

4.1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $V(k) = \{\ell \in \mathbb{Z} / \|\ell - k\|_1 = 1\}$. Or pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a $\|\ell - k\|_1 = |\ell - k|$, donc $\|\ell - k\|_1 = 1 \Leftrightarrow |\ell - k| = 1 \Leftrightarrow (\ell - k = 1 \quad \text{ou} \quad \ell - k = -1) \Leftrightarrow (\ell = k + 1 \quad \text{ou} \quad \ell = k - 1)$, donc : $V(k) = \{k - 1, k + 1\}$. Ainsi, $I(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ alors, compte tenu de $V(k) = \{k+1, k-1\}$ obtenue ci-dessus pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et la définition de f harmonique , on a :

$$\begin{aligned} f \text{ harmonique sur } \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \forall k' \in \mathbb{Z}, \quad f(k') = \frac{1}{2}(f(k'+1) + f(k'-1)) \\ &\Leftrightarrow \forall k' \in \mathbb{Z}, f(k'+1) = 2f(k') - f(k'-1) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) \quad (\star) \end{aligned}$$

$(\star)$ étant justifié par le changement de variable bijectif : $k = k' + 1$.
Conclusion : Une applications $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si elle vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) \tag{3}$$

4.2. Structure d'espace vectoriel : Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications harmoniques sur $\mathbb{Z}$.
$\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ car :
• la fonction nulle est harmonique puisqu'elle vérifie (3)
• Soit $f, g \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(k+2) &= \lambda f(k+2) + g(k+2) \\ &= \lambda(2f(k+1) - f(k)) + 2g(k+1) - g(k) \\ &= 2(\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\lambda f + g \in \mathscr{E}$
Dimension de $\mathscr{E}$:
Soit $f \in \mathscr{E}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$f(k+2) - f(k+1) = f(k+1) - f(k)$$

donc l'application

$$k \mapsto f(k+1) - f(k)$$

est constante de valeur $a = f(1) - f(0)$ de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k+1) - f(k) = a$$

Si p, q sont deux entiers relatifs tel que $p \leq q$, on a en sommant de p à q :

$$\sum_{k=p}^{q} f(k+1) - f(k) = ((q-p)+1)a = f(q+1) - f(p).$$

En particulier si $n \in \mathbb{N}^*$, pour $(p, q) = (0, n-1)$ il vient :

$$f(n) = f(0) + an$$

et pour $(p, q) = (-n, -1)$ il vient :

$$f(0) - f(-n) = -na,$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, f(k) = ak + f(0)$$

Égalité valable si $k = 0$ donc finalement :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(k) = ak + b, \text{ avec } \begin{cases} a = f(1) - f(0) \\ b = f(0) \end{cases}.$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, notons $f_{a,b}$ l'application de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall k \in \mathbb{Z}, f_{a,b}(k) = ak + b$.
Réciproquement,pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'application $f_{a,b}$ vérifie : $f_{a,b}(k+2) - 2f_{a,b}(k+1) + f_{a,b}(k) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc $f_{a,b} \in \mathscr{E}$. Ainsi , on a montré que :

$$\mathscr{E} = \{f_{a,b}/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarquons que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_{a,b} = af_{1,0} + bf_{0,1}$, de sorte que la famille $\mathscr{B} = (f_{1,0}, f_{0,1})$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
Par ailleurs, la famille $\mathscr{B}$ est libre car si $\lambda f_{1,0} + \mu f_{0,1} = 0$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ alors en appliquant à 0 et 1 on obtient $\lambda = \mu = 0$. Il en découle que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{E}$ et que par conséquent, $\dim \mathscr{E} = 2$.
4.3. On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $k \in I(\mathbb{Z}^*) \Leftrightarrow V(k) \subset \mathbb{Z}^*$, or $V(k) = \{k-1, k+1\}$, il en découle que

$$I(\mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z}^* \backslash \{-1, 1\} = \mathbb{Z} \backslash \{-1, 0, 1\}.$$

Notons $\mathscr{E}'$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$ harmoniques sur $I(\mathbb{Z}^*)$. Une application $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$ est harmonique sur $I(\mathbb{Z}^*)$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} f(n+2) = 2f(n+1) + f(n) \\ f(-n-2) = 2f(-n-1) - f(-n) \end{cases}$$

Comme à la question précédente, on a :

$$\exists (a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4, \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad f(k) = \begin{cases} ak + b & \text{si} \quad k \geq 1 \\ a'k + b' & \text{si} \quad k \leq -1 \end{cases} \tag{4}$$

Réciproquement, une application $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$ définie selon (4) ci-dessus est harmonique sur $I(\mathbb{Z}^*)$ (en effet les restrictions respectives à $\mathbb{Z}^*_+$ et $\mathbb{Z}^*_-$ coincident avec les restrictions d'applications harmoniques sur $\mathbb{Z}$.)
Notons $f_{a,b,a',b'}$ la fonction définie selon (4). On voit que :

$$f_{(a,b,a',b')} = af_{(1,0,0,0)} + bf_{(0,1,0,0)} + a'f_{(0,0,1,0)} + b'f_{(0,0,0,1)}$$

De sorte que $\mathscr{F} = \left(f_{(1,0,0,0)}, f_{(0,1,0,0)}, f_{(0,0,1,0)}, f_{(0,0,0,1)}\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}'$. La famille $\mathscr{F}$ est libre car si pour $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha f_{(1,0,0,0)} + \beta f_{(0,1,0,0)} + \alpha' f_{(0,0,1,0)} + \beta' f_{(0,0,0,1)} = 0$$

alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha k + \beta = 0$ ce qui donne $\alpha = \beta = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, -\alpha' k + \beta' = 0$ ce qui donne $\alpha' = \beta' = 0$.
Il en découle que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{E}'$ et que $\dim \mathscr{E}' = 4$.
4.4.
4.4.1. Pour tout $\ell \in V(k)$, on a :

$$\begin{aligned} f(\ell) &\leq \sum_{i \in V(k)} f(i) \quad (\text{ car } f \geq 0) \\ &\leq 2df(k) \quad (\text{ car } f \text{ est harmonique }) \end{aligned}$$

4.4.2. On va raisonner par récurrence sur $n = \|k - \ell\|_1$
Démarrage : Si $n = 0$ alors $\ell = k$ et la relation demandée est vérifiée (on a même une égalité).
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété à prouver est vraie pour n. Soit $\ell, k \in \mathbb{Z}^d$ tel que

$$\|\ell - k\|_1 = n + 1 \quad (\star).$$

Posons $\ell = (\ell_i)_{1\leq i\leq d}$ et $k = (k_i)_{1\leq i\leq d}$, donc $\|\ell - k\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\ell_i - k_i|$. Comme $\|\ell - k\|_1 = n+1 \geq 1$ il existe $j \in [\![1, d]\!]$ tel que $|\ell_j - k_j| \geq 1$.
Considérons $\ell' = \ell - \text{sign}(\ell_j - k_j)e[j]$. Ainsi si on pose $\ell' = (\ell'_i)_{1\leq i\leq d}$ alors pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a : $\ell'_i = \begin{cases} \ell_i & \text{si} \quad i \neq j \\ \ell_j - \text{sign}(\ell_j - k_j) & \text{si} \quad i = j \end{cases}$.
On a $\|\ell' - k\|_1 = n$, en effet :

$$\|\ell' - k\|_1 = |\ell'_j - k_j| + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{d} |\ell_i - k_i|.$$

(On convient que la somme : $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{d} |\ell_i - k_i|$ vaut 0 dans le cas particulier de $d = 1$).
Remarquons que, compte tenu de $\forall t \in \mathbb{Z}^*, t = \text{sign}(t)|t|$ et du fait que $[\ell_j - k_j| \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\ell'_j - k_j| &= |\ell_j - k_j - \text{sign}(\ell_j - k_j)| \\ &= |\text{sign}(\ell_j - k_j)(|\ell_j - k_j| - 1)| \\ &= |\ell_j - k_j| - 1. \end{aligned}$$

Il en découle que $\|\ell' - k\|_1 = \|\ell - k\|_1 - 1 = (n+1) - 1 = n$.
Il est aisé de remarquer aussi que $\|\ell' - \ell\|_1 = 1$.
En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(\ell') \leq (2d)^{\|\ell'-k\|_1} f(k) \quad (\star\star)$$

Puisque $\|\ell - \ell'\|_1 = 1$, donc d'après la question précédente, on a :

$$f(\ell) \leq 2df(\ell') \quad (\star\star\star)$$

Combinant $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ il vient :

$$f(\ell) \leq (2d)^{\|\ell'-k\|_1+1} f(k)$$

et comme $\|\ell' - k\|_1 + 1 = \|\ell - k\|_1$,on a finalement :

$$f(\ell) \leq (2d)^{\|\ell-k\|_1} f(k)$$

4.4.3. Si on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $f(k) = 0$, alors en appliquant le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}^d, \quad f(\ell) \leq 0$$

Comme, en plus f est supposée positive, on a $f(\ell) = 0, \forall \ell \in \mathbb{Z}^d$, ce qui prouve que $f = 0$.
4.4.4. Supposons que f n'est pas nulle, alors d'après la question ci-dessus, on a $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad f(k) > 0$
Appliquant la question **4.4.2.** on a pour $k, \ell \in \mathbb{Z}^d$:

$$(1) \quad \ln(f(\ell)) \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d) + \ln(f(k))$$

ce qui fournit :

$$(2) \quad \ln(f(\ell)) - \ln(f(k)) \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$$

Par symétrie des rôles, on a aussi :

$$(2)' \quad \ln(f(\ell)) - \ln(f(k)) \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$$

Il en découle que :

$$|\ln(f(\ell)) - \ln(f(k))| \leq \|\ell - k\|_1 \ln(2d)$$

Partie II : Un résultat de Liouville dans le cadre discret

5.1. On se donne une application $g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\exists (a,b) \in [0,+\infty[^2, \forall k \in \mathbb{Z}^d, |g(k)| \leq \exp(a\|k\|_1 + b). \tag{5}$$

5.1.1. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g(Y_n)| \leq \exp(an+b) \tag{6}$$

La variable aléatoire Y_n étant à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, on a en vertu de (5) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g(Y_n)| \leq \exp(a\|Y_n\|_1 + b)$$

Donc, pour avoir (6), il suffit qu'on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|Y_n\|_1 \leq n \tag{7}$$

On a pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$Y_{i+1} - Y_i = \text{sign}(X_i) e[|X_i|]$$

On suppose que $n \geq 1$. Par sommation de 0 à $n-1$, et compte tenu de $Y_0 = 0$, on obtient :

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \text{sign}(X_i) e[|X_i|]$$

Comme sign est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et que les vecteurs $e[|X_i|]$ sont tous de norme 1, on a par l'inégalité triangulaire : $\|Y_n\|_1 \leq n$; inégalité valable si $n = 0$; ce qui achève la preuve.
5.1.2. Puisque $U(\Omega) = \mathbb{N}$, on a d'après la question précédente :

$$|g(Y_U)| \leq \exp(aU + b) \tag{8}$$

Considérons la variable aléatoire réelle $V = \exp(aU + b)$. Puisque U admet une espérance, alors par le théorème de transfert appliqué à la fonction $t \mapsto \exp(at + b)$, il suffit que la série :

$$\sum \mathbb{P}(U = n) \exp(an + b)$$

converge absolument pour que V admette une espérance , auquel cas $\mathbb{E}(V)$ est la somme de cette série. Or le terme général de la série en question est $V_n = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}\exp(an+b)$, donc $V_n = \exp(b-\lambda)\frac{(\lambda e^a)^n}{n!}$ de sorte que $V_n \geq 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} V_n = \exp(b-\lambda)\exp(\lambda e^a) = \exp(b + \lambda(e^a - 1))$, donc V admet une espérance et $\mathbb{E}(V) = \exp(b + \lambda(e^a - 1))$. En vertu de (8) ci-dessus, on déduit que la variable aléatoire réelle $|g(Y_U)|$ admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(|g(Y_U)|) \leq \exp(b + \lambda(e^a - 1)).$$

5.1.3. • L'existence de l'espérance de la variable aléatoire $g(Y_U)^2$:
De l'inégalité (8) ci-dessus, on déduit aussi :

$$0 \leq g(Y_U)^2 \leq \exp(2aU + 2b) \tag{9}$$

En posant $a' = 2a$ et $b' = 2b$, le procédé utilisé ci-dessus permet de déduire que la variable aléatoire $g(Y_U)^2$ admet une espérance avec une majoration similaire en remplaçant a et b par $2a$ et $2b$ respectivement.

• Par le théorème de transfert appliqué à la variable aléatoire $g(Y_U)$ et l'application $t \mapsto t^2$, on a, en notant $D = g(Y_U)(\Omega)$:

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{x \in D} x^2 \mathbb{P}(g(Y_U) = x)$$

Soit $\omega \in \Omega$, alors :

$$\begin{aligned} \omega \in (g(Y_U) = x) &\Leftrightarrow g(Y_U(\omega)) = x \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^d, Y_U(\omega) = k \quad \text{et} \quad g(k) = x \\ &\Leftrightarrow \exists k \in Z_x, \omega \in (Y_U = k) \end{aligned}$$

où pour tout $x \in D$, on pose $Z_x = \{k \in \mathbb{Z}^d / g(k) = x\}$. Ainsi on a prouvé que

$$(g(Y_U) = x) = \bigcup_{k \in Z_x} (Y_U = k).$$

Comme il s'agit d'une union dénombrable disjointe, on a alors :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{x \in D} \sum_{k \in Z_x} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

Si on note $Z = \bigcup\limits_{x \in D} Z_x$ alors $(Z_x)_{x \in D}$ est une partition de Z. En effet :

• Pour tout $x \in D$ on a $Z_x \neq \emptyset$ car comme $x \in D$ il existe $\omega \in \Omega$ tel que $g(Y_U)(\omega) = x$. Posons $k = Y_U(\omega)$ alors $k \in \mathbb{Z}^d$ et $g(k) = x$, ce qui veut dire $k \in Z_x$, donc $Z_x \neq \emptyset$.

• Si $x, y \in D$ tel que $Z_x \cap Z_y \neq \emptyset$, soit $k \in Z_x \cap Z_y$ alors $x = g(k)$ et $y = g(k)$, donc $x = y$.

• Finalement on a $\bigcup\limits_{x \in D} Z_x = Z$ par définition de Z.

Comme nous avons une famille sommable de nombres réels positifs, on peut appliquer les principes de sommation par paquets, notamment on a :

(i) Pour tout $x \in D$ la famille $(g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k))_{k \in Z_x}$ est sommable.

(ii) Si on note s_x sa somme alors la famille $(s_x)_{x \in D}$ est sommable.

(iii) On a : $\sum\limits_{x \in D} s_x = \sum\limits_{k \in Z} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$.

Cela veut dire :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{k \in Z} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

On va montrer que si [2], $\mathbb{P}(Y_U = k) \neq 0; (k \in \mathbb{Z}^d)$, alors $k \in Z$. En effet, si $\mathbb{P}(Y_U = k) \neq 0$ alors forcément $(Y_U = k) \neq \emptyset$. Soit alors $\omega \in \Omega$ tel que $Y_U(\omega) = k$ et soit $x = g(k)$. Alors $k \in Z_x$, et comme $Z_x \subset Z$, on a $k \in Z$.

Il en résulte que $\mathbb{P}(Y_U = k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^d \backslash Z$, par suite :

$$\mathbb{E}(g(Y_U)^2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

5.2. On considère $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. On rappelle que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1}$$

---

2. En fait on peut démontrer même que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \quad \mathbb{P}(Y_U = k) > 0$$

c'est-à-dire que $Z = \mathbb{Z}^d$

5.2.1. Soit $j \in \mathbb{N}$,On a $Y_j(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{Z}^d$. On va démontrer cela par récurrence :
Pour $j = 0$ on a $Y_0(\Omega) = \{0\}$, donc c'est clair.
Si pour $j \in \Omega$ l'ensemble $Y_j(\Omega)$ est fini comme $Y_{j+1} = Y_j + \text{sign}(X_j)e[|X_j|]$ et que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\text{sign}(X_j)(\omega) \in \{-1, 1\}$ et $e[|X_j(\omega)|] \in \{e_1, \cdots, e_d\}$, alors $\text{sign}(X_j)e[|X_j|](\Omega)$ est fini. Et comme $Y_j(\Omega)$ est par hypothèse fini, alors $Y_{j+1}(\Omega)$ est fini, ce qui termine la preuve.
Ainsi l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_j est fini, donc de même pour la variable aléatoire $f(Y_j)$ et elle admet par suite les moments de tout ordre, notamment le moment d'ordre 2.
Remarquons que l'inégalité $f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1})$ s'écrit(puisque $f \geq 0$) : $|f(k)| \leq \exp(a\|k\|_1 + b)$ avec $a = \ln(2d)$ et $b = 0$, ce qui permet de dire que f satisfait la condition de la question précédente pour g. On peut donc appliquer les résultat de la question **5.1.3.**, donc : la variable aléatoire $f(Y_U)$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k)$$

Remarquons que pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in (Y_U = k) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, U(\omega) = n \quad \text{et} \quad Y_n(\omega) = k \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in ((U = n) \cap (Y_n = k)) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U = n) \cap (Y_n = k)) \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad (Y_U = k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U = n) \cap (Y_n = k))$$

Compte tenu de l'indépendance des Y_n et U supposée par l'énoncé et du fait que la réunion ci-dessus est disjointe, on a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{P}(Y_U = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n)\mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{P}(Y_n = k)$$

et par suite et par interversion des signes de sommation validé par la sommabilité de la famille en question, on a :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)^2 \mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{E}(f(Y_n)).$$

Par la même méthode utilisée dans **5.1.3.** on peut prouver que :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_U = k)$$

On obtient alors la formule demandée en utilisant aussi la même méthode que celle pour prouvée la formule donnant $\mathbb{E}(f(Y_U)^2)$.
5.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $Y_{n+1} = Y_n + \text{sign}(X_n)e[|X_n|]$
On a

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathbb{P}(Y_{n+1} = k)$$

Notons qu'il s'agit d'une somme finie car $\forall p \in \mathbb{N}$, $Y_p(\Omega)$ est fini.

Or, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(Y_n = \ell)\pi_{k,\ell}$$

avec

$$\pi_{k,\ell} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(Y_n = \ell) = 0 \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = k)/(Y_n = \ell) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(Y_n = \ell) \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} f(k)\mathbb{P}(Y_n = \ell)\pi_{k,\ell}$$

La famille $(\mathbb{P}(Y_n = \ell)\pi_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}$ est à support finie, ce qui permet en particulier de permuter les deux symboles de sommation et obtenir :

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)\mathbb{P}(Y_n = \ell)\pi_{k,\ell}$$

Soit $\ell \in \mathbb{Z}^d$, alors deux cas sont possibles et dans chacun des cas, on va prouver que :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)\mathbb{P}(Y_n = \ell)\pi_{k,\ell} = f(\ell)\mathbb{P}(Y_n = \ell) \tag{10}$$

• **Premier cas :** $\mathbb{P}(Y_n = \ell) = 0$, dans ce cas la relation (10) est clairement réalisée.
• **Deuxième cas :** $\mathbb{P}(Y_n = \ell) \neq 0$, dans ce cas, on a : $\pi_{k,\ell} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k/Y_n = \ell)$. Or par définition de la suite on a $\|Y_{n+1} - Y_n\|_1 = 1$, donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k/Y_n = \ell)$ est nulle dès que $k \notin V(\ell)$, et comme l'application $\chi_\ell : i \mapsto \text{sign}(i)X_{|i|}$ est une bijection de $D_d = [\![-d, d]\!]\backslash\{0\}$ vers $V(\ell)$, la valeur de cette probabilité conditionnelle , pour tout $k \in V(\ell)$ est :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k/Y_n = \ell) = \frac{1}{2d}$$

Ainsi,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)\mathbb{P}(Y_n = \ell)\pi_{k,\ell} = \left(\frac{1}{2d}\sum_{k \in V(\ell)} f(k)\right)\mathbb{P}(Y_n = \ell)$$

et comme f est harmonique, on a : $\frac{1}{2d}\sum\limits_{k \in V(\ell)} f(k) = f(\ell)$, ce qui prouve la relation (10).

On a alors :

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1})) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} f(\ell)\mathbb{P}(Y_n = \ell) = \mathbb{E}(f(Y_n)).$$

Ainsi la suite $(\mathbb{E}(f(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}(f(Y_0)) = \mathbb{E}(f(0)) = f(0) = 1$$

Déduction : On a d'après **5.2.1** :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}(f(Y_n)).$$

Compte tenu de $\mathbb{E}(f(Y_n)) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}(f(Y_U)) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

5.3. i) Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$:
- D'abord $0 \in H$, donc $H \neq \emptyset$.
- Soit$f_1, f_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: Le seule point à vérifier est l'existence de $\mathbb{E}((\lambda f_1 + f_2)(Y_U))^2$, pour cela remarquons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $0 \leq (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, donc :

$$0 \leq ((\lambda f_1 + f_2)(Y_U))^2 \leq 2\lambda^2(f_1(Y_U))^2 + 2(f_2(Y_U))^2$$

ce qui prouve que $\lambda f_1 + f_2 \in H$.
ii) S est un produit scalaire :
• Existence : Soit $f_1, f_2 \in H$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $|xy| \leq x^2 + y^2$, donc $|f_1(Y_U)f_2(Y_U)| \leq f_1(Y_U)^2 + f_2(Y_U)^2$ et comme $\mathbb{E}(f_i(Y_U)^2)$ existent pour $i \in \{1, 2\}$ (car $f_i \in H$) , il en découle que S est bien définie.
• Symétrie de S : C'est immédiat par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
• Linéarité à droite :
Soit $f, g_1, g_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} S(f, \lambda g_1 + g_2) &= \mathbb{E}(f(Y_U)(\lambda g_1 + g_2)(Y_U)) \\ &= \mathbb{E}(\lambda f(Y_U)g_1(Y_U) + f(Y_U)g_2(Y_U)) \\ &= \lambda\mathbb{E}(f(Y_U)g_1(Y_U)) + \mathbb{E}(f(Y_U)g_2(Y_U)) \quad \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &= \lambda S(f, g_1) + S(f, g_2) \end{aligned}$$

• S est positive : Clair
• S est définie :
Soit $f \in H$ tel que $S(f, f) = 0$, alors $\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = 0$. Or d'après la méthode utilisée dans la question **5.1.3**, on a $\sum\limits_{k \in Z^d} f(k)^2\mathbb{P}(Y_U = k) = 0$ et comme il s'agit d'une somme à termes positifs, on a $\forall k \in \mathbb{Z}^d, f(k)^2\mathbb{P}(Y_U = k)$. On va prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \mathbb{P}(Y_U = k) \neq 0$$

ce qui permettra de conclure que $f = 0$.
On a

$$(Y_U = k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U = n) \cap (Y_n = k))$$

donc , on a en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y_U = k) \geq \mathbb{P}((U = n) \cap (Y_n = k))$$

Les variables aléatoires Y_n et U sont indépendantes et $\mathbb{P}(U = n) > 0$, donc on est ramené à démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_n = k) > 0$$

On va prouver ça en raisonnant par récurrence sur $q = \|k\|_1$.
Démontrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(q)$ suivante :

$$\mathscr{P}(q) : \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \|k\|_1 = q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y_n = k) > 0$$

• **Démarrage :** Pour $q = 0$, si $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|k\|_1 = 0$, cela veut dire que $k = 0$ et comme $Y_0 = 0$, alors $n = 0$ convient.
• **Hérédité :** Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(q)$ est vraie et soit $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|k\|_1 = q + 1$. Comme on

l'a fait dans la question **4.4.2**, on sait qu'il existe $j \in [\![1, d]\!]$ et $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ tel que $k' = k + \varepsilon_j e[j]$ réalise $\|k'\|_1 = q$. Par hypothèse de récurrence, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(Y_n = k') > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) \geq \mathbb{P}((Y_{n+1} = k) \cap (Y_n = k')) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k / Y_n = k')\mathbb{P}(Y_n = k')$$

On a déjà prouvé dans la question **5.2.2** que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k/Y_n = k')\mathbb{P}(Y_n = k')$ vaut $\frac{1}{2d}$ (l'important est qu'elle soit non nulle). Donc $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \frac{1}{2d}\mathbb{P}(Y_n = k') > 0$.

5.4.

5.4.1. • f_i est bien définie. En effet, on a $\|m\|_2 = \max\limits_{f \in E} \|f\|_2$ et $\mathbb{1} \in E$, donc $\|m\|_2 \geq \|\mathbb{1}\|_2 > 0$. Ainsi, $m \neq 0$; comme $m \geq 0$ et m harmonique alors d'après **4.4.3**, on déduit que $\forall k \in \mathbb{Z}^d, m(k) > 0$. Ce résultat sera utile par la suite, en particulier $\forall k \in \mathbb{Z}^d, m(k) \neq 0$. Donc f_i est bien définie sur $\mathbb{Z}^d$.
• f_i est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$.
En effet : Comme $f = \alpha_i \widetilde{m}$ avec

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1}{m(\text{sign}(i)e[|i|])} \\ \\ \forall k \in \mathbb{Z}^d, \widetilde{m}(k) = m(k + \text{sign}(i)e[|i|]) \end{cases}$$

Il est aisé de voir que l'ensemble des fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$ est stable par combinaison linéaire, il suffit donc de prouver que $\widetilde{m}$ est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$
Soit pour cela $k \in I(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^d$, alors en adoptant la notation $k' = k + \text{sign}(i)e[|i|])$, on a :

$$\sum_{\ell \in V(k)} \widetilde{m}(\ell) = \sum_{\ell \in V(k)} m(\ell + \text{sign}(i)e[|i|]) = \sum_{\ell' \in V(k')} m(\ell')$$

La dernière égalité étant justifiée par le fait que l'application

$$V(k) \to V(k'); \ell \mapsto \ell' = \ell + \text{sign}(i)e[|i|]$$

est une bijection.
. Puisque m est supposée harmonique, on a donc :

$$\sum_{\ell \in V(k)} \widetilde{m}(\ell) = (2d)\ m(k') = (2d)\ \widetilde{m}(k)$$

ce qui prouve que $\widetilde{m}$ est harmonique.
Conclusion : f_i est harmonique.
• f_i déjà fait puisqu'on a prouvé que $m > 0$.
• $f_i(0) = 1$: clair en remplaçant x par 0.

5.4.2. $D_d = \{-d, \cdots, -1, 1, \cdots, d\}$. pour tout $i \in D_d$, posons

$$\lambda_i = \frac{m(\text{sign}(i)e[|i|])}{2d}$$

Alors on a ce qui suit :
• Pour tout $i \in D_d$, on a $\lambda_i > 0$; en effet pour tout $\in \mathbb{Z}^d$, on a $m(k) > 0$ et $d > 0$.
• $\sum\limits_{i \in D_d} \lambda_1 = 1$; en effet les éléments de la forme $\text{sign}(i)e[|i|]$ quand i décrit D_d, ne sont autre que les éléments de $V(0)$. Compte tenu de cette remarque et le fait que m est harmonique, on a :

$$\sum_{i \in D_d} \lambda_i = \frac{1}{2d} \sum_{\ell \in V(0)} m(\ell) = m(0) = 1$$

• $\sum\limits_{i\in D_d} \lambda_i f_i = m$, en effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, et $i \in D_d$, on sait que :

$$f_i(x) = \frac{m(x + \text{sign}(i)e[|i|])}{m(\text{sign}(i)e[|i|])}$$

Il en résulte que :

$$\sum_{i\in D_d} \lambda_i f_i(x) = \frac{1}{2d} \sum_{i\in D_d} m(x + \text{sign}(i)e[|i|]) = \frac{1}{2d} \sum_{\ell\in V(x)} m(\ell) = m(x)$$

La dernière égalité étant justifiée par le fait que m est harmonique et l'avant dernière , tout comme ci-dessus car les éléments de la forme $x + \text{sign}(i)e[|i|]$ quand i décrit D_d, ne sont autre que les éléments de $V(x)$.
Conclusion : On a montré qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in D_d}$ de nombre réels positifs de somme 1 tel que $m = \sum\limits_{i\in D_d} \lambda_i f_i$, ce qui justifie que m est un combinaison linéaire convexe des f_i.
5.4.3. Montrons que $\forall i \in D_d, \forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad m(x) = f_i(x)$ On a

$$\begin{aligned}
0 \le \sum_{i\in D_d} \lambda_i {\|f_i - m\|_2}^2 &= \sum_{i\in D_d} \lambda_i \left({\|f_i\|_2}^2 - 2\langle f_i, m\rangle + {\|m\|_2}^2\right) \\
&= \sum_{i\in D_d} \lambda_i {\|f_i\|_2}^2 - 2\left\langle \sum_{i\in D_d} \lambda_i f_i, m \right\rangle + \left(\sum_{i\in D_d} \lambda_i\right) {\|m\|_2}^2 \\
&= \sum_{i\in d_d} \lambda_i {\|f_i\|_2}^2 - 2\langle m, m\rangle + {\|m\|_2}^2, (\text{ car } \sum_{i\in D_d} f_i = m \text{ et } \sum_{i\in D_d} \lambda_i = 1) \\
&= \sum_{i\in d_d} \lambda_i {\|f_i\|_2}^2 - {\|m\|_2}^2
\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in D_d$, on a $f_i \in E$ car f_i est harmonique et $f_i \ge 0$ et $f_i(0) = 1$.
Comme $\|m\|_2 = \max\limits_{f\in E} \|f\|_2$, on a :

$$\forall i \in D_d, \quad \|f_i\|_2 \le \|m\|_2$$

Donc

$$\sum_{i\in d_d} \lambda_i {\|f_i\|_2}^2 - {\|m\|_2}^2 \le \sum_{i\in d_d} \lambda_i {\|m\|_2}^2 - {\|m\|_2}^2 = 0$$

ce qui prouve que :

$$0 \le \sum_{i\in D_d} \lambda_i {\|f_i - m\|_2}^2 \le 0$$

donc que :

$$\sum_{i\in D_d} \lambda_i {\|f_i - m\|_2}^2 = 0$$

Comme il s'agit d'une somme à termes positifs et qu'en plus $\lambda_i > 0, \forall i \in D_d$, on a $\forall i \in D_d, f_i = m$
Conclusion : $\forall i \in D_d, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad f_i(k) = m(k)$.
• Pour tout $i \in D_d$, posons $u_i = \text{sign}(i)e[|i|]$.
Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a $m(u_{-i}) = f_i(u_{-i}) = \frac{m(u_{-i}+u_i)}{m(u_i)}$
Comme $u_{-i} + u_i = 0$ et que $m(0) = f_i(0) = 1$, on obtient :

$$(\star\star\star) \quad \forall i \in [\![1, d]\!], \quad m(u_i)m(u_{-i}) = 1$$

On a
$$1 = m(0) = \frac{1}{2d}\sum_{i\in D_d} m(u_i) \ \ (\text{car } \ m \ \text{ est harmonqiue sur } \mathbb{Z}^d)$$
On obtient compte tenu de $(\star\star\star)$ ci-dessus :
$$\sum_{i=1}^{d}\left(m(u_i) + \frac{1}{m(u_i)}\right) = 2d$$
qui s'écrit aussi
$$(\star\star) \quad \sum_{i=1}^{d}\left(m(u_i) + \frac{1}{m(u_i)} - 2\right) = 0$$
ou alors :
$$\sum_{i=1}^{d}\frac{(m(u_i)-1)^2}{m(u_i)} = 0 \tag{11}$$
Dans (11) on a une somme nulle dont les termes sont positifs, donc ces termes sont tous nuls, d'où : $\forall i \in [\![1,d]\!] \quad m(u_i) = 1$, ce qui, compte tenu de $(\star\star\star)$, donne aussi : $\forall i \in [\![1,d]\!] \quad m(u_{-i}) = 1$, ce qui donne finalement : $\forall i \in D_d \quad m(u_i) = 1$
Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ alors $m(x) = f_i(x) = \frac{m(x+u_i)}{m(u_i)}$ par suite : $m(x+u_i) = m(x)m(u_i) = m(x)$ (car $m(u_i) = 1$) ,ce qui se traduit aussi par :
$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall i \in [\![1,d]\!], \quad m(x+e[i]) = m(x-e[i]) = m(x). \tag{12}$$
On va démontrer par récurrence sur $n = \|x\|_1$ que $m(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.
-Pour $n = 0$ c'est clair car $m(0) = 1$.
-Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $m(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|x\|_1 = n$. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|x\|_1 = n+1$. Posons $x = \sum_{j=1}^{d} x_j e[j]$, et comme $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{d}|x_j| = n+1$ on peut affirmer qu'il existe $i \in [\![1,d]\!]$ tel que $|x_i| \geq 1$. Comme on a fait à la question 4.4.2. , on sait que si on pose $x' = x - \text{sign}(x_i)e[i]$ alors $\|x'\|_1 = n$. On a alors $m(x) = m(x' \pm e[i]) = m(x') = 1$ (on a utilisé la propriété (12) ci-dessus et l'hypothèse de récurrence).
Ceci finit la preuve du fait que m est constante de valeur 1 sur $\mathbb{Z}^d$.
5.5. • Soit $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_+$, harmonique tel que $f(0) = 1$, donc $f \in E$, ainsi :
$$V(f(Y_U)) = \mathbb{E}(f(Y_U)^2) - \mathbb{E}(f(Y_U))^2 = \mathbb{E}(f(Y_U)^2) - 1$$
car $\mathbb{E}(f(Y_U)) = 1$ d'après la question **5.2.2.**.
Par ailleurs, on a : $\mathbb{E}(f(Y_U)^2) = \|f\|_2{}^2 \leq \|m\|_2 = \mathbb{E}(m(Y_U)^2)$, donc : $V(f(Y_U)) \leq \mathbb{E}(m(Y_U)^2) - 1$.
• Comme m est constante de valeur 1, on a $\mathbb{E}(m(Y_U)^2) = 1$ donc $V(f(Y_U)) \leq 0$ et par suite $V(f(Y_U)) = 0$. En posant $\mu_0 = \mathbb{E}(f(Y_U))$ on a alors : $\mathbb{E}((f(Y_U) - \mu_0)^2) = 0$ donc $\|f - \mu_0\|_2 = 0$ et par suite $f = \mu_0$, donc f est constante de valeur μ_0.
5.6. Démonstration du résultat de Liouville :
Soit $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ une application.
- Premier cas : Si f est harmonique positive et tel que $f(0) = 1$ alors d'après ce qui précède, f est constante.
- Deuxième cas : Si f est harmonique minorée, on a f est minorée, donc
$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, a < f(k)$$
Posons $F = \frac{f-a}{f(0)-a}$
• On a $F = \alpha f + \beta \mathbb{1}$ avec $\alpha = \frac{1}{f(0)-a}$ et $\beta = \frac{-a}{f(0)-a}$ et $\mathbb{1}$ est l'application constante sur $\mathbb{Z}^d$ de valeur

1, donc F est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$, vue comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$ (Il est aisé de prouver qu'une telle combinaison linéaire est harmonique).
• $F \geq 0$: clair.
• $F(0) = 1$: clair.
D'après le premier cas, F est constante sur $\mathbb{Z}^d$, par suite $f = (f(0) - a)F + a\mathbb{1}$ est constante sur $\mathbb{Z}^d$.
- Troisième cas : Soit $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, harmonique et majorée, alors $(-f)$ est harmonique minorée, donc d'après le deuxième cas ci-dessus, $(-f)$ donc f est constante. Ceci termine la preuve du résultat de Liouville.